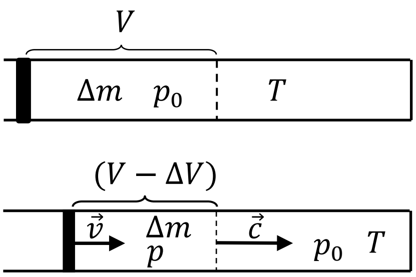
Problema 1

Barem de notare	Parţial	Total
a) La nivelul pistonului există un ventru de oscilație, iar la capătul închis un nod. $x_{nod} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} = (2\text{n}+1)\frac{\lambda}{4} = (2\text{n}+1)\frac{c}{4\nu}$, cu condiția $x \le l$	1p	2p
$x_{ventru} = 2n\frac{\lambda}{4} = 2n\frac{c}{4\nu}$, cu condiția $x < l$	1p	
b) În interiorul tubului se pot forma n fuse întregi plus o jumătate de fus: $l = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2\text{n}+1)\frac{\lambda}{4}$ 	0,5p	2p
Obținem: $\nu_n = (2n+1)\frac{c}{4l}$	0,5p	
Frecvența fundamentală: $\nu_0 = \frac{c}{4l}$	0,4p	
Primele trei armonici de după frecvența fundamentală: $\nu_1 = 3\nu_0$, $\nu_2 = 5\nu_0$, $\nu_3 = 7\nu_0$.	0,6p	
c) Unda longitudinală este produsă de o compresie locală și rapidă a unei mase Δm de gaz în urma unei deplasări foarte mici a pistonului $\Delta x = v\Delta t$. În intervalul de timp Δt frontul de undă se deplasează pe distanța $c\Delta t$. Pentru masa Δm de gaz, teorema de variație a impulsului conduce la relația: $pS - p_0 S = \frac{(\Delta m)v}{\Delta t}$. Masa de gaz comprimat în volumul $(V - \Delta V)$ se regăsea inițial în volumul V , de gaz necomprimat și poate fi exprimată prin relația:  $\Delta m = \rho_0 V = \rho_0 Sc\Delta t$. Putem scrie: $\Delta p \cdot S = \frac{(\rho_0 Sc\Delta t)v}{\Delta t} = \frac{p_0\mu}{RT}Scv$ și obținem: $\boldsymbol{\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\mu}{RT}cv}$ **(1)**	1p	3p
Comprimarea locală și rapidă a masei Δm de gaz poate fi considerată un proces adiabatic: $p_0 V^\gamma = (p_0 + \Delta p)(V - \Delta V)^\gamma$ Putem scrie: $p_0 V^\gamma = p_0(1 + \frac{\Delta p}{p_0}) \cdot V^\gamma \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma$ Aproximăm $\left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma$ cu $\left(1 - \gamma\frac{\Delta V}{V}\right)$ și neglijând termenul mic $\gamma\frac{\Delta p}{p_0}\frac{\Delta V}{V}$, ajungem la : $\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma\frac{\Delta V}{V} = \gamma\frac{\text{S}v\Delta t}{Sc\Delta t}$. Obținem: $\boldsymbol{\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma\frac{v}{c}}$ **(2)**	1p	
Egalând relațiile (1) și (2), $\frac{\mu}{RT}cv = \gamma\frac{v}{c}$ obținem dependența de temperatură a vitezei de propagare a frontului de undă: $\mathbf{c} = \sqrt{\frac{\gamma\mathbf{RT}}{\boldsymbol{\mu}}}$.	0,5p	
Calculul numeric conduce la valoarea $c \cong 353m/s$.	0,5p	
d) Unda directă și unda reflectată sunt descrise de ecuațiile: $u_d = A_d sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ și $u_r = A_r sin\left[\omega t - \frac{2\pi\left(2l - x - \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda}\right]$ Amplitudinea oscilației rezultante se obține din compunerea undei directe cu unda reflectată: $A_M = \sqrt{A_d^2 + A_r^2 + 2A_d A_r cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(2l - x - \frac{\lambda}{2}\right) - x\right]}$	1p	3p
$A_d = A_0 e^{-bx}$ și $A_r = A_0 e^{-b(2l-x)}$	1p	
După calcule: $A_M = A_0 e^{-bl}\sqrt{e^{2b(l-x)} + e^{-2b(l-x)} + 2cos\frac{4\pi}{\lambda}\left(l - x - \frac{\lambda}{4}\right)}$	1p	
Total		**10p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

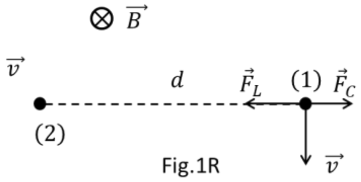
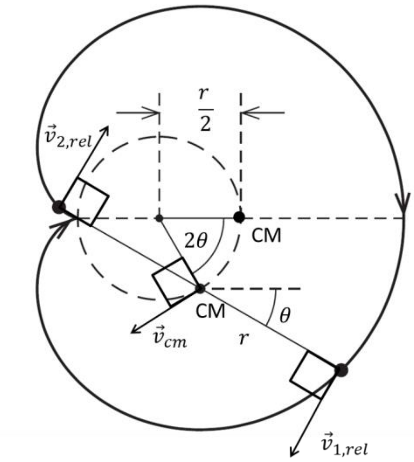
Problema 2

Barem de notare	Parțial	Total
a1) $x(t) = l\sin\varphi(t)$	0,75p	6p
$y(t) = y_0(t) - l\cos\varphi(t) = a\cos(\omega\cdot t) - l\cos\varphi(t)$	0,75p	
a2) $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi(t)$	0,75p	
$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -a\,\omega\sin(\omega\cdot t) + l\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi(t)$	0,75p	
a3) $E_p = mgy = mg(a\cos(\omega\cdot t) - l\cos\varphi(t))$	1p	
$E_c = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2)$ Folosind expresiile vitezelor de la punctul precedent expresia energiei cinetice devine $E_c = \frac{m}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 a^2\sin^2\omega t - mal\omega\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\,(t)\sin\omega t$	1p	
a4) În sistemul de referință neinerțial în care punctul de sprijin este în repaus, accelerația efectivă instantanee are expresia – $g_{efectiv} = -g - \frac{d^2y_0}{dt^2} = -g + a\omega^2\cos(\omega\cdot t)$. Ecuația de mișcare este cea a pendulului simplu în acest sistem de referință neinerțial: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g_{efectiv}}{l}\sin\varphi$.	1p	
b1) Pornim de la $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a\,\omega^2\cos(\omega t))\sin\varphi$ și descompunem $\varphi = \gamma + \beta$, obținând $\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a\,\omega^2\cos(\omega t))\sin(\gamma+\beta)$.	0,2p	4p
γ poate fi considerat constant la evaluarea dinamicii lui β: impunem $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$	0,2p	
Întrucât $a\omega^2 \gg g$, neglijăm g.	0,2p	
Pentru că $\gamma \gg \beta$, neglijăm β în argumentul sinusului.	0,2p	
Ecuația se reduce la $\frac{d^2\beta}{dt^2} = a\,\omega^2\cos(\omega t)\sin(\gamma)$. Expresia dată este soluție γ putând fi considerat constant	0,2p	
b2) Ecuația exactă este $\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a\,\omega^2\cos(\omega t))\sin(\gamma+\beta)$.	0,3p	
Factorul $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ conține termeni liniari în $\cos(\omega t)$ și $\sin(\omega t)$ care se anulează în urma medierii temporale.	0,3p	
Partea dreaptă a ecuației se prelucrează ținând cont de faptul că β este proporțional cu a: $(g - a\,\omega^2\cos(\omega t))\sin(\gamma+\beta)$ $= (g - a\,\omega^2\cos(\omega t))(\sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta)$ $\cong (g - a\,\omega^2\cos(\omega t))\left(\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)\sin\gamma + \beta\cos\gamma\right)$ $\cong g\sin\gamma - a\,\omega^2\cos(\omega t)\sin\gamma - g\frac{\beta^2}{2}\sin\gamma + g\,\beta\cos\gamma - a\,\omega^2\beta\cos(\omega t)\cos\gamma$	0,3p	
Înlocuind expresia $\beta = -\frac{a}{l}\sin\gamma\cos(\omega t)$ obținem pentru partea dreaptă a ecuației de mișcare: $g\sin\gamma - a\,\omega^2\cos(\omega t)\sin\gamma - \frac{g}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\sin^3\gamma\cos^2(\omega t)$ $+ g\frac{a}{l}\sin\gamma\cos\gamma\cos(\omega t) + \frac{a^2\,\omega^2}{l}\sin\gamma\cos\gamma\cos^2(\omega t)$	0,3p	
În urma medierii temporale rămân doar termenii	0,3p	

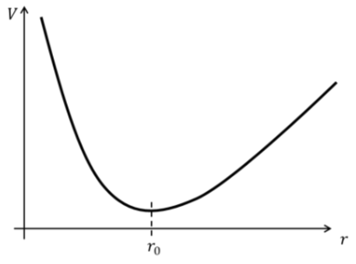
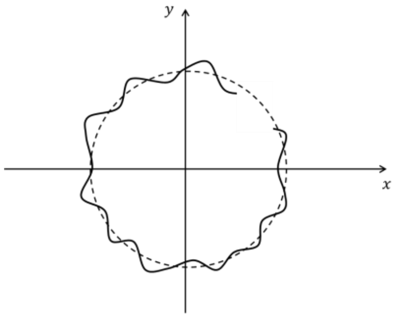
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$g\sin\gamma - \frac{g}{4}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^3\gamma + \frac{a^2\,\omega^2}{2l}\sin\gamma\ \cos\gamma$		
Condiția $l\omega^2 \gg a\omega^2 \gg g$ permite neglijarea celui de-al doilea termen. Ecuația de mișcare finală pentru componenta lentă este $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\gamma - \frac{a^2\,\omega^2}{2l^2}\sin\gamma\ \cos\gamma$	0,3p	
b3) Prin simpla derivare a expresiei potențialului efectiv se obține $\frac{dV}{d\gamma} = \frac{g}{l}\sin\gamma + \frac{a^2\,\omega^2}{2l^2}\sin\gamma\ \cos\gamma\ = -\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, conform ecuației găsite la punctul anterior.	0,2p	
b4) Sunt întotdeauna extreme ale potențialului configurațiile pentru care $\frac{dV}{d\gamma} \sim \sin\gamma = 0$ cu soluții posibile $\gamma = 0$ și $\gamma = \pi$	0,2p	
Pentru a stabili dacă extremele sunt minime sau maxime analizăm derivata a doua $\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{g}{l}\cos\gamma + \frac{a^2\,\omega^2}{2l^2}(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)$.	0,2p	
Mai precis, $\left.\frac{d^2V}{d\gamma^2}\right\|_{\gamma=0} = \frac{g}{l} + \frac{a^2\,\omega^2}{2l^2} > 0$ și $\left.\frac{d^2V}{d\gamma^2}\right\|_{\gamma=\pi} = -\frac{g}{l} + \frac{a^2\,\omega^2}{2l^2} > 0$ dacă $(a\omega)^2 > 2gl$. În condițiile date ambele minime sunt deci configurații de echilibru stabil.	0,2p	
Coordonatele carteziene corespunzătoare sunt $x\|_{\gamma=0} = 0,\ y\|_{\gamma=0} = -l$ și $x\|_{\gamma=\pi} = 0,\ y\|_{\gamma=\pi} = l$.	0,2p	
În ambele situații (pendul forțat și ne-forțat) există echilibru stabil pentru punctul $x\|_{\gamma=0} = 0\ y\|_{\gamma=0} = -l$, în care particula se află în poziția cea mai coborâtă. Echilibrul corespunzător poziției de pendul inversat $x\|_{\gamma=\pi} = 0,\ y\|_{\gamma=\pi} = l$ apare numai în cazul în care pendulul este permanent ținut în mișcare prin perturbarea punctului de sprijin, de aici denumirea de *echilibru dinamic*.	0,2p	
Total		**10p**

Problema 3

Barem de notare	Parțial	Total
a1. Legea a II a lui Newton $ma = evB - k\frac{e^2}{d^2}$  Fig.1R	1p	
a2. Din **a1** rezultă $2m\frac{v^2}{d} - evB + k\frac{e^2}{d^2} = 0$, care are soluții reale dacă $\Delta \geq 0, \Delta = e^2B^2 - 8mk\frac{e^2}{d^3}$. De aici rezultă că $d_{min} = 2\sqrt[3]{\frac{km}{B^2}}$.	1p	**3p**
a3. Înlocuind d_{min} în legea de mișcare găsim $v = \frac{eB}{2m}\sqrt[3]{\frac{km}{B^2}}$	1p	
b1. La momentul inițial $v_1 = v_0$ și $v_2 = 0$ astfel că $v_{cm} = \frac{v_0}{2}$. Centrul de masă poate fi asimilat cu o particulă cu masa $2m$ și sarcina $-2e$ aflată în câmpul magnetic B, asupra căreia acționează o forță centrală $F_L = 2ev_{cm}B$. Astfel din $\frac{2mv_{cm}^2}{r_{cm}} = 2ev_{cm}B$ rezultă $r_{cm} = \frac{mv_0}{2eB}$ și $\omega_{cm} = \frac{eB}{m}$.	1p	
b2. Cum asupra oricărui electron acționează aceleași forțe ca la **a1** rezultă că $\omega = \frac{2v}{d_{min}} = \frac{eB}{2m}$. Observăm că $\omega = \frac{\omega_{cm}}{2}$ de unde rezultă că $r = 2r_{cm}$ și că $\theta_{cm} = 2\theta$. Traiectoria particulelor arată ca în fig.2R. La orice moment de timp este adevărată relația $\vec{v}_{electron} = \vec{v}_{electron,rel} + \vec{v}_{cm}$. Prin urmare: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1,rel} + \vec{v}_{cm}$, $v_1 = 2v_{cm}\cos\frac{\theta}{2}$ și $\vec{v}_2 = \vec{v}_{2,rel} + \vec{v}_{cm}$, $v_2 = 2v_{cm}\sin\frac{\theta}{2}$. În consecință $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dar $\theta = \omega\Delta t$ de unde $\Delta t = \frac{\pi m}{eB}$. 	2p	**3p**
c1. $E_c = E_{c,radiala} + E_{c,rotatie} = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m\omega^2r^2}{2}$	0,5p	
c2. $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_{rez}$, $\vec{L} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \times m(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath})$, $\vec{L} = m(xv_y - yv_x)\vec{k}$	0,5p	
c3. Din expresia finală de la **c2** rezultă că $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = m(xa_y - ya_x)$; $\vec{v} \times \vec{B} = (v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}) \times B\vec{k} = -v_xB\vec{\jmath} + v_yB\vec{\imath}$. Din legea a II a lui Newton $m\vec{a} = k\frac{e^2}{r^3}\vec{r} - eB(-v_x\vec{\jmath} + v_y\vec{\imath})$ rezultă că: $\begin{cases} ma_x = k\frac{e^2}{r^3}x - eBv_y \\ ma_y = k\frac{e^2}{r^3}y + eBv_x \end{cases}$ și în final $m(xa_y - ya_x) = eB(xv_x + yv_y)$. Termenul din stânga este determinat mai sus, iar $xv_x + yv_y = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2)$ și prin urmare $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{eB}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2) = \frac{eB}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2$. Din definiția $J = L - \frac{eB}{2}r^2$ rezultă că $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \frac{eB}{2}r^2\right)$, dar deoarece $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{eB}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2$ rezultă că $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J = 0$ deci $J = ct$.	1p	**4p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

c4. Pornind de la $J = m\omega r^2 - \frac{eB}{2}r^2$ rezultă că $\omega = \frac{J}{mr^2} + \frac{eB}{2m}$ și atunci $E_c = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{J}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)^2$. Energia potențială electrostatică fiind $E_{p,e} = k\frac{e^2}{r}$ atunci $E = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{J}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)^2 + k\frac{e^2}{r}$	1p	
c5. Ultimii doi termeni definesc energia de configurație a sistemului astfel că $E_p = \frac{mr^2}{2}\left(\frac{J}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)^2 + k\frac{e^2}{r}$. Se vede că $\lim_{r\to 0} E_p = \infty$ și că $\lim_{r\to\infty} E_p = \infty$ și prin urmare E_p admite un minim pentru o valoare $r = r_0$. Schița dependenței $E_p = E_p(r)$ este redată în fig. 3R, iar forma traiectoriei electronilor pentru o variație mică δr în jurul poziției de echilibru $r = r_0$ în fig. 4R.  Fig. 3R  Fig. 4R	1p	
Total		**10p**

Barem propus de:
prof. Florin BUTUȘINĂ – Colegiul Național ”Simion Bărnuțiu”, *Șimleu-Silvaniei*
cercetător științific dr. Virgil V. BĂRAN – Facultatea de Fizică, Universitatea *București*
prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național ”Sfântul Sava”, *București*

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.